18-10451@usb.ve Carlo M. Herrera Di Giacinto

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

RESUMEN TEÓRICO MATEMÁTICAS III (MA-1116)
($1^{er} PARCIAL$)

Prefacio

La presente guía ha sido creada con el fin de facilitarles a los estudiantes de la Universidad Simón Bolívar un resumen teórico de los temas principales referentes al Álgebra Lineal ajustada al programa vigente del curso de Matemáticas III (MA-1116), tanto en lo concerniente al orden de los tópicos como a la profundidad con que estos son tratados. Sin embargo, por la forma en que están presentados los diversos temas, esta obra también puede ser de interés para estudiantes de otras instituciones universitarias que requieran adquirir nociones básicas del Álgebra Lineal.

Extiendo mis agradecimientos al profesor **Jorge Sánchez Rivero (Galipán)** por transmitirme la pasión por este curso y por el apoyo durante el proceso de creación de esta guía, tanto por la información acá expuesta (extraída de sus clases) como por la revisión del material.

Agradecimientos a **GECO USB**, agrupación estudiantil de la que soy miembro, por ayudarme a crear y distribuir este material y por guiarme con las dudas que surgieron durante el proceso de digitalización.

Agradecimientos especiales a **Santiago Finamore, Asxel Ramírez, Ka Man Fung, Oscar González, Juan Cazaubon y Jose Carlos Contreras** compañeros del curso y amigos que me han ayudado a compilar la información y a crear el formato de la guía.

Los siguientes comentarios (extraídos del libro "Álgebra lineal y sus aplicaciones" de David C. Lay) ofrecen algunos consejos prácticos e información para ayudarle a dominar el material y disfrutar del curso.

En álgebra lineal, los *conceptos* son tan importantes como los *cálculos*. Más adelante en su carrera, las computadoras harán los cálculos, pero usted tendrá que elegir cuáles son pertinentes, saber interpretar los resultados, y después explicar los resultados a otras personas. Por esta razón, muchos ejercicios le piden que explique o justifique sus cálculos. Con frecuencia se solicita una explicación por escrito como parte de la respuesta. Debe evitar la tentación de consultar las respuestas antes de haber tratado de escribir la solución. De lo contrario, es probable que crea que entiende algo cuando en realidad no es así.

Para dominar los conceptos de álgebra lineal, tendrá que leer y releer el texto con cuidado. Los nuevos términos aparecen en negritas, a veces dentro de un recuadro de definición.

En un sentido práctico, el álgebra lineal es un lenguaje. Usted tiene que aprender este lenguaje de la misma manera que un idioma extranjero, esto es, con el trabajo diario. ***¡Mantenerse al día con el curso le ahorrará mucho tiempo y angustia!***

Esta guía fue preparada, organizada y digitalizada en LaTeX por Carlo Herrera. Cualquier error se agradece notificarlo al autor.

I. Matrices. Operaciones con matrices.

1. Definiciones.

1.1. **Matriz:** Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo de mn números dispuestos en m filas y n columnas.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2\mathrm{n}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3\mathrm{n}} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & a_{\mathrm{m}3} & ... & a_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix}$$

En ocasiones, denotaremos la matriz A como $A = (a_{\mathrm{ij}})$

1.2. **Elemento de una matriz:** La componente o elemento ij (ésimo) de A, denotado a_{ij}, es el número dispuesto en la fila i y la columna j de A.

1.3. **Vector fila:** Una matriz $1 \times n$ se llama <u>vector fila</u> (o vector renglón). El vector fila $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & ... & a_{i\mathrm{n}} \end{pmatrix}$ de A se llama fila i (o renglón i) de A.

1.4. **Vector columna:** Una matriz $m \times 1$ se llama <u>vector columna</u>. El vector columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ . \\ a_{\mathrm{m}j} \end{pmatrix}$ de A se llama columna j de A.

1.5. **Matriz cuadrada:** Si A es una matriz $m \times n$ con $m = n$, decimos que A es una <u>matriz cuadrada</u> de orden n.

1.6. **Matriz nula:** Si todos los elementos de una matriz A son iguales a cero, la matriz se denomina <u>matriz cero</u> o matriz nula, en ocasiones denotada como $\vec{0}$.

1.7. **Matrices iguales:** Dos matrices $A = (a_{\mathrm{ij}})$ y $B = (b_{\mathrm{ij}})$ son iguales si y sólo si:

i) Son del mismo tamaño | *ii)* $a_{\mathrm{ij}} = b_{\mathrm{ij}}, \ \forall ij$

1.8. **Diagonal principal de una matriz:** Sea $A = (a_{\mathrm{ij}})$ una matriz cuadrada de orden n, la <u>diagonal principal</u> de A consiste en los elementos a_{ii}, con *i=1, 2, ..., n*.

1.9. **Matriz Identidad:** La matriz identidad de orden n, denotada como I_n, es la matriz cuadrada $n \times n$ cuyos elementos de la diagonal son todos 1 mientras que los demás son cero, es decir:

$$I = (b_{\text{ij}}), \text{ con } b_{\text{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Además, si A es una matriz cuadrada de orden n, se satisface

$$\boxed{AI_n = I_n A = A}$$

Δ Suma de matrices.

Se define únicamente para matrices de igual tamaño. Sean $A = (a_{\text{ij}})$ y $B = (b_{\text{ij}})$ dos matrices $m \times n$; la suma de A y B, $A + B$, es una matriz $m \times n$ tal que:

$$\boxed{A + B = (a_{\text{ij}} + b_{\text{ij}})}$$

Nota: Si las matrices no tienen el mismo orden $m \times n$, **NO** se pueden sumar.

Δ Multiplicación de matrices por un escalar.

Si $A = (a_{\text{ij}})$ es una matriz $m \times n$ y λ un escalar, entonces la matriz λA es una matriz $m \times n$ dada por:

$$\boxed{\lambda A = (\lambda a_{\text{ij}})}$$

Δ Producto escalar.

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ dos vectores, definimos el producto escalar (o producto punto o interno) como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Observación:

1) El producto escalar resulta en un escalar.

2)Los vectores a multiplicar deben ser del mismo tamaño

Propiedades del producto escalar

Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores y κ un escalar:

1) $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4) $\kappa(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\kappa\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a}(\kappa \cdot \vec{b})$

Δ Multiplicación de matrices.

El producto matricial se define únicamente si el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz.

Sea $A = (a_{\text{ij}})$ y $B = (b_{\text{ij}})$ matrices de tamaño $m \times p$ y $p \times n$ respectivamente; entonces el producto de A con B es una matriz C $m \times n$, tal que:

Si $C = (c_{\text{ij}})$, entonces

$$c_{\text{ij}} = (\text{fila } i \text{ de A}) \cdot (\text{columna } j \text{ de B})$$
$$= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & ... & a_{i\text{p}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \cdot \\ a_{\text{p}j} \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

3. Propiedades.

Sean A, B, C matrices $m \times n$ y α, β escalares:

3.1. $A + \vec{0} = A$.

3.2. $0 \cdot A = \vec{0}$.

3.3. $A + B = B + A$.

3.4. $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3.5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

3.6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

3.7. $1 \cdot A = A$.

II. Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL).

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+4y=6 \\ 8x-2y=4 \end{cases}$$

Este sistema podemos reescribirlo de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 8x-2y \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

A su vez, esta expresión se puede reescribir como

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}} \underset{\vec{x}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{\vec{b}}{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

En general, para un sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1\mathrm{n}}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2\mathrm{n}}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3\mathrm{n}}x_n = b_3 \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad\quad . \qquad . \\ a_{\mathrm{m}1}x_1 + a_{\mathrm{m}2}x_2 + ... + a_{\mathrm{mn}}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Se puede representar matricialmente como

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2\mathrm{n}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3\mathrm{n}} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & a_{\mathrm{m}3} & ... & a_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix}} \underset{\vec{x}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{\vec{b}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}} \tag{2}$$

Que a su vez, se puede compactar como

$$\boxed{A\ \vec{x} = \vec{b}} \tag{3}$$

1. Definiciones.

1.1. **Matriz de coeficientes:** La matriz A de (2) se llama matriz de coeficientes asociada al sistema (1).

1.2. **Matriz ampliada:** Si reescribimos el sistema (1) como

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\mathrm{n}} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\mathrm{n}} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3\mathrm{n}} & b_3 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & a_{\mathrm{m}3} & \dots & a_{\mathrm{mn}} & b_m \end{array}\right)$$

A esta matriz se le conoce como matriz aumentada (o ampliada) del sistema (1).

1.3. **Eliminación gaussiana:** La eliminación gaussiana, también llamada reducción por filas, reduce un SEL a otro sistema más fácil de resolver y que tiene el mismo conjunto solución. Consta de tres operaciones denominadas operaciones elementales por filas (OEF).

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales (SEL) utilizando la matriz ampliada se aplica la eliminación gaussiana.

1.4. **Operaciones Elementales por Filas (OEF):**

i) Multiplicar (o dividir) una fila por un número distinto de cero.

ii) Sumar un múltiplo escalar de una fila a otra.

iii) Intercambiar filas.

1.5. **Matrices equivalentes por filas:** Si una matriz A se obtiene de una matriz B por medio de una sucesión finita de OEF, decimos que A y B son equivalentes por filas.

1.6. **Forma escalonada (reducida) por filas:** Una matriz se encuentra en la forma escalonada reducida si cumple las siguientes condiciones:

i) Todas las filas (si las hay) cuyos elementos son todos ceros se encuentran en la parte inferior de la matriz.

ii) El primer número distinto de cero (empezando por la izquierda) en cualquier fila cuyos elementos no todos son ceros, es 1; lo llamamos **pivote**.

iii) El pivote en cualquier fila se encuentra a la derecha del pivote de la fila superior.

iv) Cualquier columna con pivotes tiene ceros en sus demás elementos.

Si la matriz sólo satisface las condiciones *i*), *ii*) y *iii*), la matriz se encuentra en la forma escalonada por filas.

Observación:

1) La forma escalonada por filas no es única.

2) Toda forma escalonada reducida por filas contiene la forma escalonada por filas. El recíproco es falso.

3) Siempre se puede llevar una matriz a la forma escalonada (reducida) por filas.

1.7. **Métodos para resolver SEL**

1.7.1.**Método de Gauss:** Se reduce la matriz a la forma escalonada, se despeja la última incógnita y se aplica sustitución de retroceso.

1.7.2. **Método de Gauss-Jordan:** se reduce la matriz a la forma escalonada reducida por filas y se despejan las incógnitas "directamente".

III. Solución de SEL. Sistemas homogéneos y no homogéneos.

Consideremos un sistema de m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1\mathrm{n}}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2\mathrm{n}}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3\mathrm{n}}x_n = b_3 \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad . \qquad . \\ a_{\mathrm{m}1}x_1 + a_{\mathrm{m}2}x_2 + ... + a_{\mathrm{mn}}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

Una solución a $(*)$ es una n-upla cualquiera de números $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisface todas las ecuaciones.

Sin embargo un SEL puede no tener solución, tener solución única o infinitas soluciones.

1. Definiciones.

1.1. **Consistencia o inconsistencia de un SEL:** Diremos que un SEL es inconsistente (o incompatible) si no tiene solución, mientras que es consistente (o compatible) si tiene al menos una solución.

1.2. **Sistema homogéneo y no homogéneo:** Un sistema general $m \times n$ $(*)$ se llama homogéneo si todas las constantes b_i (i=1, 2, ..,m) son cero. Es decir, tiene la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1\mathrm{n}}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2\mathrm{n}}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3\mathrm{n}}x_n = 0 \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad . \qquad . \\ a_{\mathrm{m}1}x_1 + a_{\mathrm{m}2}x_2 + ... + a_{\mathrm{mn}}x_n = 0 \end{cases}$$

Un SEL que no sea homogéneo se denomina no homogéneo.

1.3. **Solución trivial y no trivial:** Es fácil ver que todo sistema homogéneo tiene al menos una solución, llamada solución trivial: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Toda solución de un sistema homogéneo que no sea la solución trivial se denomina solución no trivial.

1.4. **Sistema homogéneo asociado:** Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ la representación matricial de $(*)$ con $b \neq \vec{0}$; un sistema homogéneo asociado se define por:

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{0}}$$

2. Teoremas.

2.1. Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única si y sólo si la matriz de coeficientes es equivalente a la matriz identidad I_n

2.2. Si un SEL tiene más incógnitas que ecuaciones entonces no tiene solución o tiene infinidad de ellas.

2.3. Un sistema de ecuaciones homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinitas soluciones. Si tiene mas ecuaciones que incógnitas puede o no tener soluciones no triviales

2.4. Sean x_1, x_2 dos soluciones al sistema no homogéneo $A\vec{x} = \vec{b}$, entonces su diferencia $x_1 - x_2$ es solución del sistema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$.

2.5. **Corolario 1:** Sea x_p una solución particular al sistema no homogéneo $A\vec{x} = \vec{b}$ y sea $\vec{y}$ otra solución al mismo; entonces existe una solución x_h al sistema homogéneo asociado tal que:

$$\boxed{\vec{y} = x_h + x_p}$$

Nota: El corolario no será de mucha utilidad durante este curso. Sin embargo, nos será de utilidad en el curso de Matemáticas IV a la hora de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales.

IV. Matriz Inversa.

1. Definiciones.

1.1. **Matriz Inversa:** Una matriz B_{nxn} se llama inversa de una matriz A_{nxn} si

$$\boxed{AB = BA = I_n} \qquad (1)$$

La inversa de A se denota por A^{-1}. De modo que (1) sería

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$$

1.2. **Matriz Invertible:** Decimos que una matriz es invertible o no singular si tiene inversa. Esto es, si existe una matriz B_{nxn} tal que satisface (1).

1.3. **Matriz Singular:** Si una matriz A_{nxn} no tiene inversa, decimos que es no invertible o singular.

Δ Cálculo de la inversa de una matriz.

Para calcular A^{-1} bastará con ampliar la matriz A a la martriz identidad del mismo orden que A y aplicar OEF para llevar a A a la identidad. Veamos el caso 2×2 (el razonamiento es el mismo para matrices de otro orden):

Sea A$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Como $AA^{-1} = I_n$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} ay+bw=0 \\ cy+dw=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 1 \end{array}\right)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow (A \mid I_2)$$

Ahora, supongamos que al aplicar Gauss-Jordan queda

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & e & f \\ 0 & 1 & g & h \end{array}\right) \longrightarrow (I_2 \mid B)$$

Esta matriz B es igual a la inversa de A.

Si al aplicar OEF nos encontramos con inconsistencias o se eliminan filas, la matriz A resultaba ser singular.

2. Teoremas.

2.1. Si una matriz A_{nxn} es invertible, entonces su inversa es única.

2.2. Si A_{nxn} y B_{nxn} son matrices invertibles, entonces AB también es invertible y se cumple que

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

2.3. Si A_{nxn} es invertible, entonces el sistema no homogéneo $A\,\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}}$$

2.4. Sea A_{nxn} una matriz invertible, la inversa de la inversa de A será la propia matriz A. Es decir

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

2.5. Si A_{nxn} es invertible, entonces la matriz A es equivalente por filas a la matriz identidad.

2.6. Si A_{nxn} es invertible, entonces la forma escalonada (reducida) por filas de A tiene n pivotes.

V. Matriz transpuesta.

1. Definiciones.

1.1. **Transpuesta de una matriz:** Sea $A = (a_{\text{ij}})$ una matriz $m \times n$, entonces la transpuesta de A, denotada A^T, es la matriz $n \times m$ que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas de A. Es decir

$$\boxed{A^T = (a_{\text{ji}})}$$

1.2. **Matrices Características:** Sea $A_{n\times n}$, decimos que es

- **Simétrica**, si $A^T = A$
- **Antisimétrica**, si $A^T = -A$
- **Ortogonal**, si $A^{-1} = A^T$ o si $AA^T = A^T A = I_n$
- **Idempotente**, si $A^2 = A$ (o $A^n = A, \ \forall n \in \mathbb{N}$)
- **Involutiva**, si $A^2 = I_n$
- **Nilpotente**, si $A^k = \vec{0}$, para algún $k \in \mathbb{N}$

3. Propiedades.

3.1. $(A^T)^T = A$.

3.2. $(AB)^T = B^T A^T$.

3.3. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

3.4. Si $A_{n\times n}$ es invertible, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

VI. Determinante.

1. Definiciones.

1.1. **Determinante:** El determinante de una matriz $A_{n\times n}$, denotado por $\det A$ o $|A|$, se define como:

- Si $n = 1$, $A = (a)$ y $\det A = a$
- Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Para $n > 2$ se utiliza el método de expansión por cofactores.

1.2. **Menor complementario:** Sea $A_{n\times n}$, llamaremos menor complementario (o menor ij de A), denotado M_{ij}, a la matriz $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A.

1.3. **Cofactor:** El cofactor ij de A, denotado por A_{ij}, se define como

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}) = (-1)^{i+j}|M_{ij}|}$$

1.4. **Expansión por cofactores:** Sea $A = (a_{\mathrm{ij}})$ una matriz $n \times n$, el determinante de a, $\det A$ *o* $|A|$, es una función de las matrices cuadradas a los "reales" definida por:

- $$\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (1) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad (2) \end{aligned}$$

La expresión del lado derecho (1) y de (2) se llama expansión por cofactores o expansión de Laplace. Es decir, se puede calcular el determinante de A expandiendo por cofactores por cualquier fila o columna de A.

1.5. **Matrices triangulares:** Sea $A = (a_{\mathrm{ij}})$ una matriz $n\times n$, la matriz A será triangular superior si todos sus elementos debajo de la diagonal principal son cero. Es decir, si $a_{ij} = 0, \quad \forall i > j$. La matriz A será triangular inferior si todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero. Es decir, si $a_{ij} = 0, \quad \forall i < j$.

1.6. **Matriz diagonal:** Sea $A = (a_{\mathrm{ij}})$ una matriz $n \times n$, la matriz A será una matriz diagonal si todos los elementos que no se encuentran en la diagonal principal son cero. Es decir, si
$a_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j$

2. Teoremas.

2.1. Sea $A = (a_{\text{ij}})$ una matriz $n \times n$ triangular (inferior o superior), entonces

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2.2. Sean A y B matrices $n \times n$, entonces

$$\boxed{|AB| = |B||A|}$$

.

Nota: En general, el determinante de una suma NO es la suma de los determinantes. Es decir, $|A+B| \neq |A| + |B|$.

2.3. Sea A $n \times n$,

$$\boxed{\det A^T = \det A}$$

.

2.4. Sea A $n \times n$ y κ un escalar,

$$\boxed{\det \kappa A = \kappa^n \det A}$$

3. Propiedades.

Sean A,B y C matrices $n \times n$, entonces:

3.1. Si A tiene una fila o columna nula, entonces $\det A = 0$.

3.2. Si B se obtiene de A multiplicando una de sus filas o columnas por un escalar k, entonces $\det B = k \det A$.

3.3. Si A, B y C son matrices idénticas excepto que para algún i la i-ésima fila de C es la suma de la fila i-ésima de A y la fila i-ésima de B, entonces:

$$\det C = \det A + \det B$$

Nota: esta propiedad también aplica si para algún j la j-ésima columna de C es la suma de la columna j-ésima de A y la columna j-ésima de B.

3.4. Si B se obtiene de A intercambiando dos filas o columnas, entonces $\det B = -\det A$.

3.5. Si una fila o columna de A es múltiplo escalar de otra, entonces $\det A = 0$.

3.6. Si dos filas o columnas de A son iguales, entonces $\det A = 0$.

3.7. Si B se obtiene de A sumando un multiplo escalar de una fila o columna a otra , entonces $\det B = \det A$.

VI. Adjunta de una matriz. Determinantes e inversas.

1. Definiciones.

1.1. **Adjunta de una matriz:** Sea $A = (a_{\text{ij}})$ una matriz $n \times n$ y sea $B = (A_{\text{ij}})$ la matriz de sus cofactores. Entonces la adjunta de A, denotada $adj(A)$, es la transpuesta de la matriz de cofacotres. es decir

$$\boxed{adj(A) = B^T = (A_{ji})}$$

2. Teoremas.

2.1. Sea $A_{n\times n}$, entonces si $i \neq j$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + ... + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad (1)$$

Donde los A_{jk} son los cofactores de A y los a_{ik} sus componentes.

Observación: si $i = j$ en el lado izquierdo de (1), entonces es igual al determinante de A.

2.2. Sea $A_{n\times n}$, entonces:

$$A \text{ es invertible } \iff \det A \neq 0$$

2.3. Si $A_{n\times n}$ es invertible entonces $\det A \neq 0$ y

$$\boxed{\det A^{-1} = \tfrac{1}{\det A}}$$

2.4. Sea $A = (a_{\text{ij}})$ una matriz $n \times n$, entonces

$$\boxed{A \cdot adj(A) = \det A \cdot I_n}$$

2.5. **Corolario 2:** Si $A_{n\times n}$ es invertible entonces $\det A \neq 0$ y

$$\boxed{A^{-1} = \tfrac{1}{\det A} \cdot adj(A)}$$

2.6. Sea $A_{n\times n}$ invertible y $\det A \neq 0$

$$\boxed{|adj(A)| = |A|^{n-1}}$$

2.7. Sea $A_{n\times n}$ una matriz invertible

$$\boxed{adj(A^{-1}) = (adj(A))^{-1}}$$

2.8. Sea $A_{n\times n}$ invertible, entonces

$$\boxed{adj(adj(A)) = |A|^{n-2} \cdot A}$$

2.9. **Regla de Cramer:** Sea $A_{n\times n}$ y sea $\det A \neq 0$. Sea el SEL $A\,\vec{x} = \vec{b}$ y sea D_i el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la columna i de A por $\vec{b}$. Entonces, la solución única al sistema $A\,\vec{x} = \vec{b}$ viene dada por:

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|} \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{|A|} \quad , \quad x_3 = \frac{D_3}{|A|} \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n = \frac{D_n}{|A|}$$

Agradecimientos.

Al **Prof. Jorge Sánchez** por la información (extraída de sus clases) y revisión del material.

A **Santiago Finamore, Asxel Ramírez, Oscar González, Ka Man Fung y Juan Cazaubon**; colaboradores en la elaboración de la guía.

Δ *Última modificación*: 30 de enero de 2020

Agradecimientos especiales a GECO USB

gecousb.com.ve | @GECOUSB

Autor:

Carlo Miguel Herrera Di Giacinto

18-10451

@cmhd2001 | carlomhd2001@gmail.com